TITLE:

正則拡張性定理と有限性条件との関係について (多変数函数論にあらわれる解析と幾何)

AUTHOR(S):

林本, 厚志

CITATION:
林本, 厚志. 正則拡張性定理と有限性条件との関係について (多変数函数論にあらわれる解析と幾何). 数理解析研究所講究録 1998, 1058: 36-43

ISSUE DATE:
1998-08

URL:
http://hdl.handle.net/2433/62334

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1058 巻 1998 年 36-43

正則拡張性定理と有限性条件との関係について

林本 厚志 (Atsushi Hayashimoto)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1. 序

$\mathbb{C}^{n+1}$ の座標を $Z=(z,s+it)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ と書く. M を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実解析的超曲面で原点を含むものとし, その定義関数を

$$\rho(Z,\bar{Z})=t-h(z,\bar{z},s) \tag{1}$$

とする. 但し h は実解析的関数で

$$\begin{cases} h(z,0,s)\equiv h(0,\bar{z},s)\equiv 0, \\ h(z,\bar{z},0)\not\equiv 0 \end{cases} \tag{2}$$

を満たすとする. $\tilde{M}$ を, M と同様な性質を持つ別の実解析的超曲面とし, F をそれらの間の CR 写像で, 原点を不動点として持つものとする. 以下, これらの記号 $F:M\to\tilde{M}$ を固定する. 実解析的超曲面の点や, それらの間の写像に対して, 種々の "有限性" の概念を定義することができる. ここでは, $F:M\to\tilde{M}$ が $\mathbb{C}^{n+1}$内の原点の近傍に正則的に拡張される為の条件を, 原点での "型" や, 写像に対して定義された "有限性" の条件を使って書き下すことを目標とする. 主定理を述べる為に, 原点が Bloom–Graham の意味で有限型であることと, CR 写像 F が 原点で $r-$有限多重性を持つことの定義を与える.

次の定義の中で, $H^{\mathbb{C}}(M)$ は M の正則接束の複素化を表わす.

定義 [3]. $H^{\mathbb{C}}(M)$ の有限個の局所切断 $L_1,\ldots,L_k$に対して,

$$[L_1,[L_2,\ldots,[L_{k-1},L_k]\ldots]_0\notin H_0^{\mathbb{C}}(M) \tag{3}$$

となるとき, 原点は Bloom–Graham の意味で有限型であるという. (3) のようになる最小の k を原点での型という. M の原点が Bloom–Graham の意味で有限型なら, 適当な座標変換により M の定義関数は (1), (2) を満たすようにできる.

次に, 写像が原点で $r-$有限多重性を持つことの定義を与える. $\mathbb{C}[[z,w]]$ により $(z,w)=(z_1,\ldots,z_n,w)$ を変数に持つ $(n+1)$ 変数形式的冪級数環を表わすことにする. 2 つの写像 $G=(g_1,\ldots,g_{n+1})$ と$\tilde{G}=(\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_{n+1})$ に対して, $\tilde{G}\underset{r}{\equiv}G$ は, $\tilde{G}$と G の対応する各成分が r 位まで等しいことを表わす.

定義. $F=(F_1,\ldots,F_{n+1}):M\to\tilde{M}$ を C^k 級の CR 写像とする. $r\le k$ となる自然数 r に対して, F が 原点で $r-$有限多重性を持つとは, $\tilde{F}|_M \underset{r}{\equiv} F$ なる任意の $\mathbb{C}[[z,w]]$ の元の組, $\tilde{F}=(\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_{n+1})$, に対して,

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[z]]/(\tilde{F}_1(z,0),\ldots,\tilde{F}_n(z,0))<\infty$$

が成立することとする. ここで $(\tilde{F}_1(z,0),\ldots,\tilde{F}_n(z,0))$ は, $\tilde{F}_1(z,0),\ldots,\tilde{F}_n(z,0)$ で生成される $\mathbb{C}[[z]]$ のイデアルとする.

注意 1. 定義から, C^k 級写像が原点で $r-$有限多重性 $(k\ge r+1)$ を持てば, それは $(r+1)-$有限多重性を持つことが分かる.

主定理. *Fは原点を含む実解析的超曲面の間の C^{2r+1}級の CR 写像で, 各原点は Bloom–Graham の意味で有限型であるとする. このとき Fが原点で $r-$有限多重性を持つならば, Fは $\mathbb{C}^{n+1}$の原点の近傍に正則的に拡張される.*

この定理を証明するに至った動機を述べる為に, 今までに知られている CR 写像に関する正則拡張定理を振り返ってみる. CR 写像に関する正則拡張定理は, その仮定に注目することにより大きく 2 つのタイプに分けられる. 1 つ目は, 写像に対して強い仮定を置き, 超曲面には弱い仮定しか置かないもの. 2 つ目は, 写像には弱い仮定しか置かない代りに, 超曲面には強い仮定を置くものである. より詳しく 1 つ目のタイプの定理を説明する. M. Baouendi, H. Jacobowitz, F. Treves [4] は, $\tilde{M}$ が原点で本質的有限 (essentially finite) [5] で, F を C^∞ 級の CR 微分同相写像とするとき, F は原点の近傍に正則的に拡張されることを示した. 最近になって Y. Pan は, 有限多重性の特徴付けの研究を通して次の定理を得た.

定理 [1 2]. *M を原点で本質的有限な実解析的超曲面, $\tilde{M}$は原点を通る実解析的超曲面で, 原点を通る正次元の解析的部分集合を含まないとする. $F:M\to\tilde{M}$ を C^∞ 級の CR 写像で, $F^{-1}(0)\backslash\{0\}$ が M 内の疎な集合であるとする. このとき F は原点の近傍に正則的に拡張される.*

2 つ目のタイプの定理には次のようなものがある. S. M. Webster [13] は, 超曲面とは限らない実解析的 CR 多様体 $M,\tilde{M}$ に対して, それらのレビ形式が原点で非退化で, それぞれのレビ形式の像が開集合を含むとき, C^1 級 CR 微分同相写像 $F:M\to\tilde{M}$ は, 原点の近傍に正則的に拡張されることを示した. その後, S. Bell [1], [2] は Webster の定理から写像の可微分性を省くことに成功した.

定理 [2]. *Mと$\tilde{M}$を, 原点で擬凸な実解析的超曲面とし, 各原点は D'Angelo の意味で有限型 [7] とする. $F:M\to\tilde{M}$ を連続な CR 写像で, $F^{-1}(0)$ が M 内でコンパクトであるとする. このとき F は原点の近傍に正則的に拡張される.*

これらの定理の後, 次のような疑問を持つことは自然なことである.

自然な疑問, 動機.

(1) *1 つ目のタイプの定理で, 写像の可微分性に関する仮定を弱めることはできるか?*
(2) *2 つ目のタイプの定理で, 超曲面の有限型に関する仮定を弱めることはできるか?*

これらをふまえて主定理を見返してみると, 写像の滑らかさが C^{2r+1} 級になっていること, D'Angelo の意味の有限型や, 本質的有限型なら, Bloom–Graham の意味の有限型であることから, 主定理は上の"自然な疑問"に対する1つの解答を与えていることが分かる. この論文の構成は次のようである. §2 では, 種々の定義と定理の証明に必要な補題を与える. §3 で主定理の証明を与える. §4 では M と $\tilde{M}$ が特別な条件を満たすなら, 主定理中の可微分性を表す r を具体的に書き下すことができることを示す. 主定理の余次元が高い場合についても §3 と同様の手法で証明できると思われる.

2. 完備系, Hopf 補題の性質, CR 関数のテーラー展開

主定理の証明では, 完備系に関する, Han の定理 [9] の証明の議論を使う. 完備系の定義は次のようである.

定義 [8]. n 変数関数 f が位数 K の完備系を満たすとは, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で $|\alpha| = K$ を満たすものに対して, 実解析的関数 $\mathcal{F}_\alpha$ が存在して

$$D^\alpha f = \mathcal{F}_\alpha\left(D^\beta f;\ |\beta| < K\right)$$

が成り立つこととする. 写像が完備系を満たすとは, その各成分が完備系を満たすこととする.

注意 2. 定義から, C^K 級の関数が位数 K の完備系を満たすなら, 変数を複素化することにより, その関数はある複素空間内の開集合上の正則関数になる.

次に Hopf 補題の性質について定義を与える.

定義. $M, \tilde{M}$ の定義関数が (1), (2) のように正規化されているとき, F が原点で Hopf 補題の性質を満たすとは,

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial s}(0) \neq 0$$

が成り立つときをいう.

注意 3. $F : M \to \tilde{M}$ を実3次元の実解析的超曲面の間の CR 写像で, 原点での型がそれぞれ $l, \tilde{l}$ であるとする. このとき $l/\tilde{l}$ は自然数である [10].

CR 関数は, 次の補題のように冪級数の形に展開できる. ここで M の定義関数が (1), (2) のようであれば, 原点の十分小さい近傍 U が存在して $(\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U \subset M$ が成り立つことに注意する.

補題 [11]. $F = (F_1, \ldots, F_{n+1}) : M \to \tilde{M}$ は C^m 級の CR 写像で, $F(0) = 0$ を満たすものとする. 原点の十分小さい近傍 U が存在して,

$$\left\{\begin{array}{ll} F_j((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U) \underset{m}{\equiv} 0, & j = 1, \ldots, n, \\ \mathrm{Im} F_{n+1}((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U) \underset{m}{\equiv} 0, & \end{array}\right. \tag{4}$$

が成り立つなら, F の各成分は次のように展開できる;

$$F_j(z, \bar{z}, s) \underset{m}{\equiv} \sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} a^j_{\alpha,p} z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$F_{n+1}(z, \bar{z}, s) \underset{m}{\equiv} \sum_{q \geq 1} b_q (s + ih(z, \bar{z}, s))^q, \quad b_q \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

証明は [11] を参照. 手法は C^∞ 級の CR 写像に対する展開 [5] の場合と同様である.

3．主定理の証明

CR 写像 F が r−有限多重性を持つことから，各 $j = 1,\dots,n$ に対して，ある $\alpha(j) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で，$|\alpha(j)| \leq r$ かつ

$$\frac{\partial^{|\alpha(j)|}F_j(z,0)}{\partial z^{\alpha(j)}}(0) \neq 0 \tag{7}$$

となるものがある．

$\tilde{\rho}$ を $\tilde{M}$ の定義関数とし，原点の近傍でテーラー展開する．各 $j = 1,\dots,n$ に対して，$\nu^j = (\nu^j_1,\dots,\nu^j_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を次のように定義する．先ず，

$$\nu^j_j = \min\left\{k \in \mathbb{N}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z_j^k\text{の倍数の項が存在する}\right\}$$

とし，$m \neq j$ なる n 以下の自然数 m に対して，ν^j_m を次のように帰納的に定義する．$m < j$ のとき，

$$\nu^j_m = \min\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z_1^{\nu^j_1}\dots z_{m-1}^{\nu^j_{m-1}}z_m^k z_j^{\nu^j_j}\text{ の倍数の項が存在する}\right\},$$

$m > j$のとき，

$$\nu^j_m = \min\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z_1^{\nu^j_1}\dots z_j^{\nu^j_j}\dots z_{m-1}^{\nu^j_{m-1}}z_m^k\text{ の倍数の項が存在する}\right\}.$$

各 $j = 1,\dots,n$ に対して，$\mu^j = (\mu^j_1,\dots,\mu^j_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$を定義する．

$$k(j) = \min\{l \in \mathbb{N}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z^{\nu^j}\bar{z}_l\text{ の倍数の項が存在する }\}$$

とし，この $k(j)$ に対して$\mu^j_{k(j)}$を次のように定義する．

$$\mu^j_{k(j)} = \min\{d \in \mathbb{N}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z^{\nu_j}\bar{z}^d_{k(j)}\text{の倍数の項が存在する }\}.$$

$k(j) < m \leq n$ である自然数 m に対してμ^j_mを次のように定義する．

$$\mu^j_m = \min\{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z^{\nu^j}\bar{z}_{k(j)}^{\mu^j_{k(j)}}\dots\bar{z}_{m-1}^{\mu^j_{m-1}}\bar{z}^d_m\text{ の倍数の項が存在する }\}.$$

$\tau^j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する．

$$\tau^j = \min\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,;\ \tilde{\rho}\text{ の展開式の中に，}z^{\nu_j}\bar{z}^{\mu_j}s^k\text{の倍数の項が存在する}\right\}.$$

以上で，$\tilde{\rho}$ から唯一つの項，$\tilde{h}_{\nu^j\mu^j\tau^j}z^{\nu^j}\bar{z}^{\mu^j}s^{\tau^j}$，を取り出すことができた．これらの ν^j,μ^j,τ^j を使い，微分作用素 ∂_j を次のように定義する．

$$\partial_j = \frac{\partial^{|\nu^j|+|\mu^j|+\tau^j-2}}{\partial z_1^{\nu^j_1}\dots\partial z_j^{\nu^j_j-1}\dots\partial z_n^{\nu^j_n}\partial\bar{z}_{k(j)}^{\mu^j_{k(j)}-1}\partial\bar{z}_{k(j)+1}^{\mu^j_{k(j)+1}}\dots\partial\bar{z}_n^{\mu^j_n}\partial s^{\tau^j}}.$$

$J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のような j の個数と定義する.

$$J = \sharp\left\{j\ ;\ \nu^j = (0,\ldots,1,\ldots,0),\ \text{第}j\text{成分のみ 1 で他は 0}\right\}.$$

Jにより, 次のように証明を 2 つに分ける.

(I)$J \leq 1$, 又は $J \geq 2$ かつ相異なる勝手な $j_1, j_2 \in J$ に対して, $k(j_1) \neq k(j_2)$, $\mu^{j_1}_{k(j_1)} \neq \mu^{j_2}_{k(j_2)}$, $\tau^{j_1} \neq \tau^{j_2}$ の 3 つのうちどれかが成り立つ.

(II)$J \geq 2$ かつ, 相異なる $j_1, j_2 \in J$ で, 3 つの等式, $k(j_1) = k(j_2)$, $\mu^{j_1}_{k(j_1)} = \mu^{j_2}_{k(j_2)}$, $\tau^{j_1} = \tau^{j_2}$, を全て成立させるものが存在する.

(I) の場合. ∂_j の定義により,

$$\bar{L}^{\alpha(k(j))}\partial_j\tilde{\rho}(F,\bar{F}) \underset{2r+1}{\equiv} (\text{定数}) \times F_j \times \bar{L}^{\alpha(k(j))}\bar{F}_{k(j)} + \text{higher terms}$$

であるから, $n+1$ 個の方程式

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(F,\bar{F}) \underset{2r+1}{\equiv} 0, \\ \bar{L}^{\alpha(k(j))}\partial_j\tilde{\rho}(F,\bar{F}) \underset{2r+1}{\equiv} 0, \quad j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

から, 陰関数定理により $F = (F_1,\ldots,F_{n+1})$ について, $\bar{F}_m$, $\bar{L}^{\alpha(k(d))}\bar{F}_m$ を使って次のように解くことができる.

$$F_j = \mathcal{F}_j\left(\bar{F}_m, \bar{L}^{\alpha(k(d))}\bar{F}_m;\ 1 \leq m \leq n+1,\ 1 \leq d \leq n\right), \quad j = 1,\ldots,n+1.$$

ここで, $\mathcal{F}_j$ はカッコ内の変数について実解析的な関数である. よって Han の定理の証明に使われている議論を利用して, F_j は位数 $2 \times \max\{|\alpha(k)|; k = 1,\ldots,n\} + 1$ の完備系をみたすことが分かる. つまり写像 F は位数 $2r+1$ の完備系を満たすことが分かるから, 注意 2. により定理の主張を得る.

(II) の場合$\tilde{\rho}$ の代りに $z_1\tilde{\rho}$ を使うことにより (I) の場合に帰着される.

5. 特別な場合

主定理の CR 写像の可微分性を表わす r は, 一般の場合に具体的に書き下されるか否かは分かっていない. しかし $M, \tilde{M} \subset \mathbb{C}^2$ の場合, 又は一般の次元で, M $\tilde{M}$ のレビ形式が原点で非退化な場合には, 写像が原点で Hopf 補題の性質を満たすなら, それを書き下すことができることを示す. 次の定理で, $\tilde{M}$ が原点で非退化なレビ形式を持つ場合は [11] で示されている.

定理. *$M, \tilde{M}$ を実 3 次元の原点を含む実解析的超曲面で, M に含まれる原点は Bloom–Graham の意味で型 l $(< \infty)$ であるとする. $F : M \to \tilde{M}$ は C^{l+1} 級の CR 写像で, 原点で Hopf 補題の性質を持ち, (4) で $m = l+1$ の場合を満たすとする. このとき F は $\mathbb{C}^2$ の原点のある近傍に正則的に拡張される.*

証明. $\tilde{M}$ の原点での型を $\tilde{l}$ とすると, 注意 3 により $l = \tilde{l}l_0$ なる自然数 l_0 が存在するので, $\tilde{M}$に含まれる原点も Bloom–Graham の意味で有限型である. 定理の仮定の下で, $F = (F_1, F_2)$ の各成分は (5), (6) のように展開できるので, それらを $\tilde{\rho}(F,\bar{F}) \underset{l+1}{\equiv} 0$ に代入して

$$(9)\quad \frac{1}{2i}\sum_{q\geq 1} b_q\left\{(s+ih(z,\bar{z},s))^q-(s-ih(z,\bar{z},s))^q\right\}$$

$$\underset{l+1}{\equiv}\sum_{\nu+\mu\geq \tilde{l}}\tilde{h}_{\nu,\mu}\left[\sum_{\alpha\geq 1,p\geq 0} a_{\alpha,p}z^\alpha(s+ih)^p\right]^\nu\left[\sum_{\alpha\geq 1,p\geq 0}\bar{a}_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha(s-ih)^p\right]^\mu$$

$$+\text{ higher terms}$$

を得る. 両辺の $z,\bar{z}$ の次数を比較することにより, 各$\alpha=1,\dots,l_0-1$ に対して

$$\sum_{\nu+\mu=\tilde{l}}\tilde{h}_{\nu,\mu}\left[\sum_{p\geq 0}a_{\alpha,p}z^\alpha s^p\right]^\nu\left[\sum_{p\geq 0}\bar{a}_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha s^p\right]^\mu\underset{l+1}{\equiv}0,$$

つまり

$$a_{\alpha,p}=0,\quad \alpha=1,\dots,l_0-1,\ p\geq 0,\ \alpha+p\leq l_0$$

を得る. これらを (9) に代入して, 両辺の $z,\bar{z}$ の $l\ (=l_0\tilde{l})$ 次で s を含まない項を比較して

$$b_1h^{(l)}\underset{l+1}{\equiv}\sum_{\nu+\mu=\tilde{l}}\tilde{h}_{\nu,\mu}\left(a_{l_0,0}z^{l_0}\right)^\nu\left(\bar{a}_{l_0,0}\bar{z}^{l_0}\right)^\mu$$

を得る. ここで, $h^{(l)}$ は h に含まれる $z,\bar{z}$ についての l 次の斉次多項式である. よって $b_1=(\partial F_{n+1}/\partial s)(0)$ であることと, $a_{l_0,0}\neq 0$ は, F が原点で l_0- 有限多重性を持つことを表しているという 2 つのことに注意すれば, F が 原点で Hopf 補題の性質を持つことと, F が 原点で l_0- 有限多重性を持つことが同値であることが分かる. よって注意 1 と主定理から, この定理の結論を得る.

一般の次元の場合には次の定理を示すことができる.

定理 [11]. *$M,\tilde{M}$ を原点を含む $\mathbb{C}^{n+1}$内の実解析的超曲面で, それぞれ原点では非退化レビ形式を持つとする. $F=(F',F_{n+1}):M\to\tilde{M}$ を C^3 級の写像とする. F が原点で Hopf 補題の性質を満たすなら, F は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍に正則的に拡張される.*

証明. 仮定の下で, 適当な座標変換により F が (4) で $m=3$ の場合を満たすようにできるので, F の各成分は (5), (6) の場合のように展開できる. さらにレビ形式の条件から, 座標変換により M の定義関数 $\rho=t-h(z,\bar{z},s)$ は次のように Chern–Moser の正規型にできる;

$$h(z,\bar{z},s)=\sum_{j=1}^n\lambda_j|z_j|^2+\sum_{\substack{|\nu|,|\mu|\geq 2,\\ \tau\geq 0}}h_{\nu,\mu,\tau}z^\nu\bar{z}^\mu s^\tau.$$

ここで λ_j は -1 又は $+1$ を表わす. $\tilde{M}$の定義関数についても各記号の上に～を付けて同じように展開しておく. これらの座標変換はすべて [6] による. $\alpha_k=$

$(0,\ldots,1,\ldots,0)$ (第 k 成分のみ 1 で他は 0) とし, $\{L_1,\ldots,L_n\}$ を独立な接コーシーリーマンベクトル場とする. [9] により

$$\det\begin{pmatrix} L_1F_1(0) & \ldots & L_1F_n(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_nF_1(0) & \ldots & L_nF_n(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a^1_{\alpha_1,0} & \cdots & a^n_{\alpha_1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_{\alpha_n,0} & \cdots & a^n_{\alpha_n,0} \end{pmatrix} \neq 0$$

であることを示せばよい. まず $\mathrm{Im}F_{n+1} \underset{3}{\equiv} \tilde{h}(F', \bar{F}', \mathrm{Re}F_{n+1})$, つまり

$$\begin{aligned} (10)\quad & \frac{1}{2i}\Big[\sum_{q\geq 1} b_q\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^q - \sum_{q\geq 1}\bar{b}_q\big(s-ih(z,\bar{z},s)\big)^q\Big] \\ & \underset{3}{\equiv} \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j\Big[\sum_{|\alpha|\geq 1, p\geq 0} a^j_{\alpha,p}z^\alpha\big(s+ih(z,\bar{z},s)\big)^p\Big]\Big[\sum_{|\alpha|\geq 1,p\geq 0}\bar{a}^j_{\alpha,p}\bar{z}^\alpha\big(s-ih(z,\bar{z},s)\big)^p\Big] \\ & \qquad + \text{higher terms} \end{aligned}$$

から始める. 両辺の $z_i\bar{z}_k$ $(i \neq k)$ の係数を比較して

$$(11)\qquad \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j\big(a^j_{\alpha_i,0}\big)\big(\bar{a}^j_{\alpha_k,0}\big) = 0$$

を得る. (10) の両辺で $|z_k|^2$ の係数を比較することにより

$$\begin{aligned} (12)\qquad \frac{1}{2}\lambda_k(b_1+\bar{b}_1) &= b_1\lambda_k \\ &= \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j|a^j_{\alpha_k,0}|^2 \end{aligned}$$

を得る. (11), (12) をまとめると行列に関する次の関係式が得られて, F が原点で Hopf 補題の性質を満たすことから定理が示される.

$$\begin{pmatrix} a^1_{\alpha_1,0} & \ldots & a^n_{\alpha_1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_{\alpha_n,0} & \ldots & a^n_{\alpha_n,0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 a^1_{\alpha_1,0} & \ldots & \tilde{\lambda}_1 a^1_{\alpha_n,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_n a^n_{\alpha_1,0} & \ldots & \tilde{\lambda}_n a^n_{\alpha_n,0} \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

References

1. S. Bell, *Local regularity of CR homeomorphisms*, Duke Math. J. **57** (1988), 295–300.
2. ———, *CR maps between hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$, Proc. Symp. Pure Math. **52** (1991), 13–22.
3. T. Bloom and I. Graham, *On 'type' conditions for generic real submanifolds of* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. **40** (1977), 217–243.
4. M. Baouendi, H. Jacobowitz and F. Treves, *On the analyticity of CR mappings*, Ann. of Math. **122** (1985), 365–400.
5. M. Baouendi and L. P. Rothschild, *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93** (1988), 481–500.

6. S. S. Chern and J. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
7. J. D'Angelo, *Real hypersurfaces, order of contact, and applications*, Ann. of Math. **115** (1982), 615–637.
8. C. K. Han, *Rigidity of CR submanifolds and analyticity of CR immersions*, Math. Ann. **287** (1990), 229–238.
9. C. K. Han, *Complete differential system for the mappings of CR manifolds of nondegenerate Levi form*, preprint.
10. A. Hayashimoto, *On the classification theorem for CR mappings*, to appear in Nagoya Math. J.
11. ———, *On the complete system of finite order for CR mappings and its application*, preprint.
12. Y. Pan, *A characterization of the finite multiplicity of a CR mapping*, Michigan Math. J. **43** (1996), 465–474.
13. S. M. Webster, *Analytic discs and the regularity of CR mappings of real submanifolds in* $\mathbb{C}^n$, Proc. Symp. Pure Math. **41** (1984), 199–208.

CHIKUSA-KU, NAGOYA, 464-01, JAPAN
E-mail address: ahayashi@math.nagoya-u.ac.jp